Exercices supplémentaires – Second degré

Partie A : Forme canonique, équations, inéquations, factorisation

Exercice 1

Mettre sous forme canonique les trinômes suivants

$2x^2+8x-2$; x^2+3x+1 ; $-x^2+2x+5$; $3x^2+x-4$

Exercice 2

On considère $f : x \mapsto x^2-5x+6$ défini sur $\mathbb{R}$.

1) Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2) En déduire une factorisation de $f(x)$.
3) Résoudre l'inéquation $f(x)>0$.

Exercice 3

On considère $f : x \mapsto -2x^2+6x-1$ défini sur $\mathbb{R}$.

1) Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2) En déduire une factorisation de $f(x)$.
3) Résoudre l'inéquation $f(x)>0$.

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

$2x^2-12x+18=0$; $x^2-x+6=0$; $3x^2+4x-1=0$; $2x^2-x+1=0$

Exercice 5

Déterminer les éventuels points d'intersection des paraboles suivantes avec l'axe des abscisses

$y=x^2-4x+3$; $y=3x^2+2x+3$; $y=-x^2-9x-20$; $y=x^2+2x$

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes :

$x^2+5x+3=2x+3$; $(2t+1)(t-4)=t^2-4t-6$; $(t+2)^2=2t^2+5t-2$

$(x+1)(x+2)=(x+3)(x+4)+(x+5)(x+6)$

Exercice 7

Factoriser, si possible, les trinômes suivants, en un produit de deux polynômes de degré 1 :

x^2-4x-1 ; x^2-x-6 ; $3x^2+7x+2$; $16x^2+24x+9$

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par

$$f(x)=\frac{-x^2+3x+4}{x+1}$$

1) Tracer à la calculatrice la courbe de la fonction f. Que peut-on en dire ?
2) Factoriser $-x^2+3x+4$.
3) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$. Est-elle valable pour toute valeur de x ?

Exercice 9

Résoudre les inéquations suivantes

$\frac{1}{2}x^2+3x-8>0$; $x^2+3x-5<x+4$; $2(x+1)^2-3x>2$; $3x+\frac{1}{2x}\leq\frac{5}{2}$

Exercice 10

Charles affirme avoir trouvé une solution entière à l'équation $x^2-\left(2+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{8}=0$.
Qu'en pensez-vous ?

Exercice 11

1) Factoriser les polynômes x^2-x-6 et $2x^2+3x-2$.
2) Résoudre l'équation $\frac{2}{x^2-x-6}+\frac{x}{2x^2+3x-2}=0$.

Partie B : Equations à paramètres, changement de variable, identification

Exercice 1

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$.

1) Montrer que 1 est solution de $g(x) = 0$.
2) Déterminer trois réels a, b et c tels que $g(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ pour tout réel x.
3) En déduire le signe de $g(x)$.

Exercice 2

Résoudre les équations bicarrées suivantes en posant $u = x^2$:

$$x^4 - 12x^2 + 27 = 0 \quad ; \quad x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

Exercice 3

1) Résoudre l'équation $2x^2 + 5x + 2 = 0$.
2) En utilisant un changement d'inconnue, en déduire les solutions de l'équation
$$\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + 2 = 0$$
3) Par une méthode analogue, résoudre l'équation $x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 25x + 42$.

1) Développer, ordonner et réduire $(x+3)(ax^2 + bx + c)$.
2) Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c)$ pour tout réel x.
3) Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 5

On considère le trinôme suivant : $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3)$.

Pour quelles valeurs de m ce trinôme a-t-il une racine double ? Calculer alors cette racine.

Exercice 6

On considère le trinôme $x^2 - (2m+3)x + m^2$.

Pour quelles valeurs de m ce trinôme a-t-il une racine double ? Calculer alors cette racine.

Exercice 7

On considère l'équation $2x^2 - (m+2)x + m - 2 = 0$.

1) Calculer m pour que l'une des solutions soit égale à 3.
2) En déduire l'autre solution de l'équation.

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes :

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad ; \quad \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} = -1 \quad ; \quad \frac{2x+m}{x} - \frac{2x}{x+m} = 2 \quad \text{où } m \text{ est un réel donné}$$

Exercice 9

1) A l'aide de la calculatrice, tracer les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto 7 - x$ et $g : x \mapsto 2\sqrt{x-4}$.
2) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.
3) Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 10

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - ax + 3$ où a est un nombre réel.

1) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles h admet deux racines distinctes.
2) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles h admet une racine double.
3) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles h n'admet pas de racine.
4) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le minimum de h est strictement inférieur à -1.

Partie C : Déterminer un trinôme sous conditions

Exercice 1

On considère une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ qui passe par les points $A(0; 3)$, $B(1; 5)$ et $C(2; 15)$.

1) Ecrire un système de trois équations d'inconnues a, b et c traduisant l'énoncé.
2) Résoudre le système.
3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 2

On considère une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ qui passe par les points $A\left(1; -\frac{3}{2}\right)$, $B(2; -6)$ et $C\left(3; -\frac{25}{2}\right)$.

1) Ecrire un système de trois équations d'inconnues a, b et c traduisant l'énoncé.
2) Résoudre le système.
3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 3

On considère un polynôme f de degré 2 tel que $f(11) = 181$ et pour tout réel x,

$$x^2 - 2x + 2 \leq f(x) \leq 2x^2 - 4x + 3$$

1) On pose $g(x) = x^2 - 2x + 2$ et $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Déterminer les formes canoniques de g et h.
2) En déduire que pour tout réel x, on a $f(x) \geq 1$.
3) Déterminer $f(1)$
4) A l'aide des informations précédentes, déterminer la forme canonique de f puis sa forme développée.

Partie D : Variations, extremum, propriété de la courbe, position relative

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elles admettent un minimum ou un maximum et en quelle valeur il est atteint :

$$f: x \mapsto 3x^2 + 4 \quad ; \quad g: x \mapsto -2(x-4)^2 + 8 \quad ; \quad h: x \mapsto -2x^2 + 8x - 1$$

Exercice 2

Dresser, en justifiant, le tableau de variations des fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto x^2 + 4x - 6 \quad ; \quad g: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 5x$$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[-5; 3]$ par $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$.

1) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f.
2) En déduire le minimum et le maximum de f sur $[-5; 3]$.
3) Résoudre :
   a. $f(x) = -10$
   b. $f(x) = 17$
   c. $f(x) < 17$
   d. $f(x) > -20$

Exercice 4

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 - 3x$$

1) Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$
2) Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?

Exercice 5

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5}{x^2 + x + 1}$$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que pour tout réel x, $f(x) < 5$ et $f(x) > -6$.

Exercice 6

Pour un nombre réel x, le seul nombre dont le cube est égal à x s'appelle la racine cubique de x et se note $\sqrt[3]{x}$.
Par exemple $\sqrt[3]{1000} = 10$ car $10^3 = 1000$.
On définit $t = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

1) Montrer que $t^3 + 3t - 4 = 0$.
2) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $(t-1)(at^2 + bt + c) = t^3 + 3t - 4$ pour tout réel t.
3) En déduire que t est un nombre entier.

Correction exercices supplémentaires – Second degré

<u>Partie A : Forme canonique, équations, inéquations, factorisation</u>

Exercice 1

Pour tout réel x,

$2x^2+8x-2=2(x^2+4x-1)=2[(x+2)^2-4-1]=\boxed{2(x+2)^2-10}$

car $x^2+4x+4=(x+2)^2$ donc $x^2+4x=(x+2)^2-4$

Pour tout réel x,

$$x^2+3x+1=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+1=\boxed{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}$$

car $x^2+3x+\frac{9}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$

Pour tout réel x,

$-x^2+2x+5=-(x^2-2x-5)=-[(x-1)^2-1-5]=\boxed{-(x-1)^2+6}$

car $x^2-2x+1=(x-1)^2$

Pour tout réel x,

$$3x^2+x-4=3\left(x^2+\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\right)=3\left[\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}-\frac{4}{3}\right]=\boxed{3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{49}{12}}$$

Car $x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}=\left(x+\frac{1}{6}\right)^2$

Exercice 2

1) Pour tout réel x :

$$f(x)=x^2-5x+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6=\boxed{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$$

2) Pour tout réel x,

$$f(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)=\boxed{(x-3)(x-2)}$$

3)

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de $f(x)>0$ sont donc $\boxed{]-\infty;2[\cup]3;+\infty[}$

Exercice 3

1) Pour tout réel x,

$$f(x)=-2x^2+6x-1=-2\left(x^2-3x+\frac{1}{2}\right)=-2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\right]=\boxed{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}}$$

2) Pour tout réel x,

$$f(x)=-2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}\right]=-2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right]=\boxed{-2\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}$$

3)

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{7}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{7}}{2}$		$+\infty$
Signe de $x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de $f(x) > 0$ sont donc $\boxed{\left]-\infty; \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{7}}{2}; +\infty\right[}$

Exercice 4
Pour $2x^2 - 12x + 18$: $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 0$ donc le trinôme a une unique racine $x_0 = \frac{12}{4} = 3$.
D'où $\boxed{S = \{3\}}$

Pour $x^2 - x + 6$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 6 = -23 < 0$ donc le trinôme n'a pas de racines : $\boxed{S = \emptyset}$

Pour $3x^2 + 4x - 1$: $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 + 12 = 28 > 0$ donc le trinôme a deux racines :
$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{28}}{6} = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}$$
$$\boxed{S = \left\{\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}; \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}\right\}}$$

Pour $2x^2 - x + 1$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$ donc le trinôme n'a pas de racines : $\boxed{S = \emptyset}$

Exercice 5
Pour déterminer les points d'intersection d'une parabole d'équation $y = f(x)$ avec l'axe des abscisses, on commence par résoudre $f(x) = 0$.
Pour $y = x^2 - 4x + 3$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 = 4$ donc le trinôme a deux racines : $x_1 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1$.
La parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 3$ coupe donc deux fois l'axe des abscisses : au point $A(1; 0)$ et $B(3; 0)$.

Pour $y = 3x^2 + 2x + 3$: $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 3 = -32 < 0$ donc le trinôme n'a pas de racines et la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

Pour $y = -x^2 - 9x - 20$: $\Delta = (-9)^2 - 4 \times (-1) \times (-20) = 81 - 80 = 1$ donc le trinôme a deux racines $x_1 = \frac{9+1}{-2} = -5$ et $x_2 = \frac{9-1}{-2} = -4$ donc la parabole d'équation $y = -x^2 - 9x - 20$ coupe deux fois l'axe des abscisses : en $A(-5; 0)$ et $B(-4; 0)$.

Pour $y = x^2 + 2x$: $\Delta = 2^2 - 4 \times 0 = 4$ donc le trinôme a deux racines $x_1 = \frac{-2+\sqrt{4}}{2} = 0$ et $x_2 = \frac{-2-\sqrt{4}}{2} = -2$.
La parabole d'équation $y = x^2 + 2x$ coupe donc l'axe des abscisses en deux points : $O(0; 0)$ et $A(-2; 0)$.

Exercice 6
Pour tout réel x :
$x^2 + 5x + 3 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$
Donc $\boxed{S = \{0; 3\}}$

Pour tout réel t :
$(2t + 1)(t - 4) = t^2 - 4t - 6 \Leftrightarrow 2t^2 - 8t + t - 4 = t^2 - 4t - 6 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$ donc il y a deux racines : $t_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ et $t_2 = \frac{3-1}{2} = 1$. D'où $\boxed{S = \{1; 2\}}$

Pour tout réel t :
$(t + 2)^2 = 2t^2 + 5t - 2 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 4 = 2t^2 + 5t - 2 \Leftrightarrow -t^2 - t + 6 = 0$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25$ donc il y a deux racines : $t_1 = \frac{1+5}{-2} = -3$ et $t_2 = \frac{1-5}{-2} = 2$. D'où $\boxed{S = \{-3; 2\}}$

Pour tout réel x,
$(x + 1)(x + 2) = (x + 3)(x + 4) + (x + 5)(x + 6) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x^2 + 7x + 12 + x^2 + 11x + 30$
$\Leftrightarrow x^2 + 15x + 40 = 0$
$\Delta = 15^2 - 4 \times 40 = 65$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-15+\sqrt{65}}{2}$ et $x_2 = \frac{-15-\sqrt{65}}{2}$. $\boxed{S = \left\{\frac{-15+\sqrt{65}}{2}; \frac{-15-\sqrt{65}}{2}\right\}}$

Exercice 7

Pour x^2-4x-1 : $\Delta=(-4)^2-4\times(-1)=20$ donc il y a deux racines : $x_1=\frac{4+\sqrt{20}}{2}=\frac{4+2\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5}$ et $x_2=2-\sqrt{5}$. D'où $x^2-4x-1=\boxed{\left(x-2-\sqrt{5}\right)\left(x-2+\sqrt{5}\right)}$

Pour x^2-x-6 : $\Delta=(-1)^2-4\times(-6)=25$ donc il y a deux racines $x_1=\frac{1+5}{2}=3$ et $x_2=\frac{1-5}{2}=-2$. D'où $x^2-x-6=\boxed{(x-3)(x+2)}$

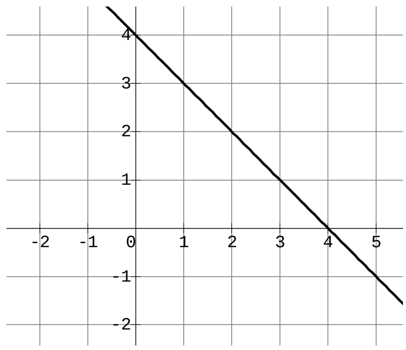
Pour $3x^2+7x+2$: $\Delta=7^2-4\times3\times2=25$ donc il y a deux racines $x_1=\frac{-7+5}{6}=-\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{-7-5}{6}=-2$. D'où

$$3x^2+7x+2=\boxed{3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+2)}$$

Pour $16x^2+24x+9$: $\Delta=24^2-4\times16\times9=0$ donc il y a une racine double $x_0=\frac{-24}{32}=-\frac{3}{4}$ d'où

$$16x^2+24x+9=\boxed{16\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}$$

Exercice 8



1) Il semble que la courbe de la fonction f soit une droite.
2) $-x^2+3x+4$: $\Delta=3^2-4\times(-1)\times4=25$ donc le trinôme a deux racines

$x_1=\frac{-3+5}{-2}=-1$ et $x_2=\frac{-3-5}{-2}=4$. D'où $-x^2+3x+4=\boxed{-(x+1)(x-4)}$

3) Pour $x\neq-1$:

$$f(x)=\frac{-x^2+3x+4}{x+1}=\frac{-(x+1)(x-4)}{x+1}=-(x-4)=\boxed{-x+4}$$

Cette expression est valable pour tout x différent de -1.

Exercice 9

Pour $\frac{1}{2}x^2+3x-8>0$: $\Delta=3^2-4\times\frac{1}{2}\times(-8)=25$ donc le trinôme est du signe de $a=\frac{1}{2}$ sauf entre les racines $x_1=\frac{-3+5}{1}=2$ et $x_2=\frac{-3-5}{1}=-8$. D'où $\boxed{S=\left]-\infty;-8\right[\cup\left]2;+\infty\right[}$

Pour $x^2+3x-5<x+4$: pour tout réel x

$x^2+3x-5<x+4\Leftrightarrow x^2+2x-9<0$:

Signe de x^2+2x-9 : $\Delta=2^2-4\times(-9)=40$ donc x^2+2x-9 est du signe de $a=1$ sauf entre les racines $x_1=\frac{-2+\sqrt{40}}{2}=\frac{-2+2\sqrt{10}}{2}=-1+\sqrt{10}$ et $x_2=-1-\sqrt{10}$. D'où $\boxed{S=\left]-1-\sqrt{10};-1+\sqrt{10}\right[}$

Pour $2(x+1)^2-3x>2$: pour tout réel x,

$2(x+1)^2-3x>2\Leftrightarrow 2(x^2+2x+1)-3x-2>0\Leftrightarrow 2x^2+x>0\Leftrightarrow x(2x+1)>0$

Donc $2x^2+x$ a deux racines 0 et $-\frac{1}{2}$ et est du signe de $a=2$ sauf entre les racines. On obtient donc

$$\boxed{S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[}$$

Pour $3x+\frac{1}{2x}\leq\frac{5}{2}$: pour tout réel x non nul

$$3x+\frac{1}{2x}\leq\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{6x^2+1}{2x}\leq\frac{5x}{2x}\Leftrightarrow\frac{6x^2-5x+1}{2x}\leq0$$

Signe de $6x^2-5x+1$: $\Delta=(-5)^2-4\times6=1$ donc $6x^2-5x+1$ est du signe de $a=6$ sauf entre les racines $x_1=\frac{5+1}{12}=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{5-1}{12}=\frac{1}{3}$. On construit ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$6x^2-5x+1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{6x^2-5x+1}{2x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $\boxed{S =]-\infty; 0[\cup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]}$

Exercice 10
La méthode de résolution classique n'aboutit pas car on obtient un discriminant dont il n'est pas facile d'avoir une racine carrée. On va donc considérer que x est un entier et raisonner par identification :
On suppose que x est un entier. Alors x^2 est également un entier.
$x^2 - (2+\sqrt{2})x + \sqrt{8} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x) = (x-2)\sqrt{2}$
Le membre de gauche est un entier donc cela doit également être le cas pour le membre de droite. Or la seule possibilité est que $x - 2 = 0$ (sinon, on aurait un nombre de la forme $k\sqrt{2}$ avec k un entier non nul…) et alors $x = 2$.
Le membre de gauche est alors : $x^2 - 2x = 2^2 - 2 \times 2 = 0$. Les deux membres sont bien égaux.
L'équation a donc bien une solution entière qui est 2.

Exercice 11

1) Pour $x^2 - x - 6$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) = 25$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$

donc $x^2 - x - 6 = \boxed{(x-3)(x+2)}$
Pour $2x^2 + 3x - 2$: $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{(-3-5)}{4} = -2$ donc
$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+2) = \boxed{(2x-1)(x+2)}$

2) Pour $x \in \mathbb{R} - \left\{3; -2; \frac{1}{2}\right\}$:

$$\frac{2}{x^2 - x - 6} + \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x-3)(x+2)} + \frac{x}{(2x-1)(x+2)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(2x-1) + x(x-3)}{(x-3)(2x-1)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 + x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$
Pour $x^2 + x - 2$: $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 9$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$.
En tenant compte de l'ensemble de définition, on obtient $\boxed{S = \{1\}}$

<u>Partie B : Equations à paramètres, changement de variable, identification</u>
Exercice 1

1) $g(1) = 1 + 5 - 12 + 6 = 0$ donc 1 est bien solution de $g(x) = 0$.
2) Pour tout réel x,

$(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$
Par identification avec $g(x)$, on obtient : $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 5 \\ c - b = -12 \\ -c = 6 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c = -6 \end{cases}$
D'où $\boxed{g(x) = (x-1)(x^2 + 6x - 6)}$

3) Signe de $x^2 + 6x - 6$: $\Delta = 6^2 - 4 \times (-6) = 60$ donc $x^2 + 6x - 6$ est du signe de $a = 1$ sauf entre les

rcines $x_1 = \frac{-6+\sqrt{60}}{2} = \frac{-6+2\sqrt{15}}{2} = -3 + \sqrt{15}$ et $x_2 = -3 - \sqrt{15}$.

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{15}$		$-3+\sqrt{15}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+6x-6		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 2
Pour $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$: on pose $u = x^2$ donc $u^2 = x^4$ et alors on a $u^2 - 12x + 27 = 0$.
$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 27 = 36$ donc il y a deux racines $u_1 = \frac{12+6}{2} = 9$ et $u_2 = \frac{12-6}{2} = 3$.
On a donc $x^2 = 9$ ou $x^2 = 3$ ce qui donne $x = 3$ ou $x = -3$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
Finalement $\boxed{S = \{3; -3; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}}$

Pour $x^4+3x^2-4=0$: on pose $u=x^2$ et alors $u^2+3u-4=0$.
$\Delta=3^2-4\times(-4)=25$ donc il y a deux racines $u_1=\frac{-3+5}{2}=1$ et $u_2=\frac{-3-5}{2}=-4$.
On a donc $x^2=1$ ou $x^2=-4$ ce qui est impossible. Finalement $\boxed{S=\{-1;1\}}$

Exercice 3

1) $2x^2+5x+2$: $\Delta=5^2-4\times2\times2=9$ donc il y a deux racines $x_1=\frac{-5+3}{4}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{-5-3}{4}=-2$.

D'où $\boxed{S=\left\{-\frac{1}{2};-2\right\}}$

2) On résout dans $\mathbb{R}-\{1\}$: on pose $u=\frac{1}{x-1}$ d'où

$\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{5}{x-1}+2=0 \Leftrightarrow 2u^2+5u+2=0 \Leftrightarrow u=-\frac{1}{2}$ ou $u=-2$ d'après la question 1

Or :

$$u=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x-1=-2\Leftrightarrow x=-1$$
$$u=-2\Leftrightarrow\frac{1}{x-1}=-2\Leftrightarrow x-1=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Finalement, $\boxed{S=\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}}$

3) On résout dans $[0;+\infty[$ et on pose $u=\sqrt{x}$ d'où $u^2=x$.

$x+5\sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow u^2+5u-3=0$

Pour u^2+5u-3 : $\Delta=5^2-4\times(-3)=37$ donc il y a deux racines $u_1=\frac{-5+\sqrt{37}}{2}$ et $u_2=\frac{-5-\sqrt{37}}{2}$.

On obtient donc $\sqrt{x}=\frac{-5+\sqrt{37}}{2}$ ou $\sqrt{x}=\frac{-5-\sqrt{37}}{2}$. Cette dernière équation n'a pas de solution car $\frac{-5-\sqrt{37}}{2}<0$. D'où

$\sqrt{x}=\frac{-5+\sqrt{37}}{2}\Leftrightarrow x=\left(\frac{-5+\sqrt{37}}{2}\right)^2\Leftrightarrow x=\frac{25-10\sqrt{37}+37}{4}=\frac{31-5\sqrt{37}}{2}$

Finalement $\boxed{S=\left\{\frac{31-5\sqrt{37}}{2}\right\}}$

Exercice 4

1) Pour tout réel x,

$(x+3)(ax^2+bx+c)\Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c=\boxed{ax^3+(b+3a)x^2+(c+3b)x+3c}$

2) Par identification entre l'expression précédente et $f(x)$, on obtient $\begin{cases}a=3\\b+3a=-4\\c+3b=-25\\3c=42\end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases}a=3\\b=-13\\c=14\end{cases}$

D'où $\boxed{f(x)=(x+3)(3x^2-13x+14)}$

3) Pour tout réel x,

$$f(x)=0\Leftrightarrow x+3=0 \text{ ou } 3x^2-13x+14=0$$

Pour $3x^2-13x+14=0$: $\Delta=(-13)^2-4\times3\times14=1$ donc il y a deux racines $x_1=\frac{13+1}{6}=\frac{7}{3}$ et $x_2=\frac{13-1}{6}=2$

On a donc $f(x)=0\Leftrightarrow x=-3$ ou $x=\frac{7}{3}$ ou $x=2$

D'où $\boxed{S=\left\{-3;2;\frac{7}{3}\right\}}$

Exercice 5

Pour $(m+3)x^2+2(3m+1)x+(m+3)$:

$\Delta=\big(2(3m+1)\big)^2-4(m+3)\times(m+3)=4(9m^2+6m+1)-4(m^2+6m+9)=32m^2-32$

Le trinôme a une racine double quand son discriminant est nul or

$\Delta=0\Leftrightarrow 32m^2-32=0\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=1$ ou $m=-1$

On a donc deux valeurs de m possible pour que le trinôme ait une racine double : 1 et -1.

Pour $m=1$, le trinôme est $4x^2+8x+4$. La racine double est $x_0=-\frac{8}{8}=-1$

Pour $m=-1$, le trinôme est $2x^2-4x+2$. La racine double est $x_0=-\frac{-4}{4}=1$.

Exercice 6
On considère le trinôme $x^2-(2m+3)x+m^2$.
Pour quelles valeurs de m ce trinôme a-t-il une racine double ? Calculer alors cette racine.

Exercice 7

1) 3 est solution de $2x^2-(m+2)x+m-2=0 \Leftrightarrow 2\times 3^2-(m+2)\times 3+m-2=0$

$\Leftrightarrow 18-3m-6+m-2=0 \Leftrightarrow m=5$
On doit donc avoir $\boxed{m=5}$ pour que 3 soit solution de l'équation.

2) Pour $m=5$, l'équation est $2x^2-7x+3=0$. $\Delta=(-7)^2-4\times 2\times 3=25$ donc il y a bien deux racines $x_1=\frac{7+5}{4}=3$ et $x_2=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}$.

L'autre solution à l'équation est donc $\boxed{\frac{1}{2}}$

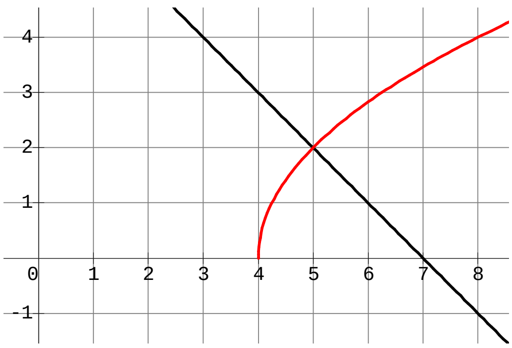
Exercice 8
Pour $x\neq 0$:
$x+\dfrac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x^2+1=3x \Leftrightarrow x^2-3x+1=0$
Pour x^2-3x+1 : $\Delta=(-3)^2-4=5$ donc il y a deux racines $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
On a donc $\boxed{S=\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}}$

Pour $x\in\mathbb{R}-\{1;2\}$
$\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3}{x-2}=-1 \Leftrightarrow 4(x-2)-3(x-1)=-(x-1)(x-2) \Leftrightarrow 4x-8-3x+3=-(x^2-2x-x+2)$
$\Leftrightarrow x-5=-x^2+3x-2 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$
Pour x^2-2x-3 : $\Delta=(-2)^2-4\times(-3)=16$ donc il y a deux racines $x_1=\frac{2+4}{2}=3$ et $x_2=\frac{2-4}{2}=-1$
Finalement $\boxed{S=\{-1;3\}}$

Pour $x\in\mathbb{R}-\{0;-m\}$ avec m un réel quelconque
$\dfrac{2x+m}{x}-\dfrac{2x}{x+m}=2 \Leftrightarrow (2x+m)(x+m)-2x^2=2x(x+m)$
$\Leftrightarrow 2x^2+2mx+mx+m^2-2x^2=2x^2+2mx \Leftrightarrow -2x^2+mx+m^2=0$
Pour $-2x^2+mx+m^2$: $\Delta=m^2-4\times(-2)\times m^2=9m^2$.
On a donc trois cas :
Soit $m=0$ et alors $\Delta=0$ et il y a une racine double $x_0=0$ qui est une valeur interdite…
Soit $m>0$, $\sqrt{\Delta}=3m$ et alors il y a deux racines distinctes : $x_1=\frac{-m+3m}{-4}=-\frac{m}{2}$ et $x_2=\frac{-m-3m}{-4}=m$
Ces deux solutions ne sont pas valeurs interdites car $m\neq 0$.
Soit $m<0$, $\sqrt{\Delta}=-3m$ et alors il y a deux racines distinctes : $x_1=\frac{-m+3(-m)}{-4}=m$ et $x_2=\frac{-m-3(-m)}{-4}=-\frac{m}{2}$
Finalement, soit $m=0$ et alors $\boxed{S=\emptyset}$, soit $m\neq 0$ et alors $\boxed{S=\left\{m;-\frac{m}{2}\right\}}$

Exercice 9

1) En noir : courbe de f ; en rouge : courbe de g.
2) Graphiquement l'équation a une unique solution 5. Cela correspond à l'abscisse du point d'intersection entre les deux courbes.
3) On résout dans $[4;+\infty[$ car f est définie sur $\mathbb{R}$ mais g n'est définie que sur $[4;+\infty[$.



$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 7-x=2\sqrt{x-4} \Leftrightarrow (7-x)^2=2^2(x-4)$ et $7-x>0$
$\Leftrightarrow 49-14x+x^2=4x-16$ et $x<7 \Leftrightarrow x^2-18x+65=0$ et $x<7$
Pour $x^2-18x+65$:$\Delta=(-18)^2-4\times 65=64$ donc il y a deux racines
$x_1=\frac{18+8}{2}=13$ et $x_2=\frac{18-8}{2}=5$
Comme on doit aussi avoir $x<7$, la seule solution possible est bien 5.

Exercice 10

1) $h(x) = x^2 - ax + 3 : \Delta = a^2 - 4 \times 3 = a^2 - 12$

h a deux racines distinctes si et seulement si son discriminant est strictement positif donc $a^2 - 12 > 0$. Or
$a^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow a^2 > 12 \Leftrightarrow a > \sqrt{12}$ ou $a < -\sqrt{12} \Leftrightarrow a > 2\sqrt{3}$ ou $a < -2\sqrt{3}$

h a deux racines distinctes pour $\boxed{a \in \left]-\infty; -2\sqrt{3}\right[\cup \left]2\sqrt{3}; +\infty\right[}$

2) h est une racine double si et seulement si son discriminant est nul donc $a^2 = 12$, autrement dit pour
$\boxed{a = \{2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\}}$

3) h n'a pas de racines si et seulement si son discriminant est strictement négatif donc $a^2 - 12 < 0$ ou encore $a^2 < 12$. On a donc $\boxed{a \in \left]-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right[}$

4) Le minimum de h est strictement inférieur à -1 si et seulement si l'inéquation $h(x) < -1$ a au moins une solutions. Or

$h(x) < -1 \Leftrightarrow x^2 - ax + 4 < 0$

Cette inéquation a au moins une solution si le discriminant de $x^2 - ax + 4$ est positif ou nul. En effet, $x^2 - ax + 4$ est du signe de 1 sauf entre les racines, si elles existent.

Or $\Delta = a^2 - 16$ donc on doit résoudre $a^2 - 16 \geq 0$ ce qui donne $\boxed{a \in \left]-\infty; -4\right[\cup \left]4; +\infty\right[}$

Partie C : Déterminer un trinôme sous conditions

Exercice 1

1) $A \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 3 = a \times 0^2 + b \times 0 + c \Leftrightarrow c = 3$

$B \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 5 = a + b + c$

$C \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 15 = 4a + 2b + c$

Les points A, B et C appartiennent à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\boxed{\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 15 \end{cases}}$

2)

$$\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b = 2 \\ 4a + 2b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 2 - a \\ 4a + 2(2 - a) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = 2 - a \\ 2a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} c = 3 \\ b = -2 \\ a = 4 \end{cases}}$$

3) La parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y = 4x^2 - 2x + 3$.

Pour déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses, on cherche les points de $\mathcal{P}$ d'ordonnée 0 donc on résout $4x^2 - 2x + 3 = 0$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 \times 3 = -44 < 0$ donc l'équation n'a pas de solution et la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

Exercice 2

1) $A \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = a + b + c$

$B \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -6 = 4a + 2b + c$

$C \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -\dfrac{25}{2} = 9a + 3b + c$

Les points A, B et C appartiennent à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\boxed{\begin{cases} a + b + c = -\frac{3}{2} \\ 4a + 2b + c = -6 \\ 9a + 3b + c = -\frac{25}{2} \end{cases}}$

2)

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{3}{2} \\ 4a + 2b + c = -6 \\ 9a + 3b + c = -\dfrac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\dfrac{3}{2} - a - b \\ 4a + 2b - \dfrac{3}{2} - a - b = -6 \\ 9a + 3b - \dfrac{3}{2} - a - b = -\dfrac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\dfrac{3}{2} - a - b \\ b = -\dfrac{9}{2} - 3a \\ 8a + 2\left(-\dfrac{9}{2} - 3a\right) = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\dfrac{3}{2} - a - b \\ b = -\dfrac{9}{2} - 3a \\ 2a = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} c = 1 \\ b = -\dfrac{3}{2} \\ a = -1 \end{cases}}$$

3) L'équation de la parabole est $y = -x^2 - \frac{3}{2}x + 1$. Pour déterminer les points d'intersection de cette parabole avec l'axe des abscisses, on résout $-x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$.

$\Delta = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times (-1) = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$ donc l'équation a deux solutions $x_1 = \frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{-2} = -2$ et $x_2 = \frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{-2} = \frac{1}{2}$.

Finalement la parabole $\mathcal{P}$ coupe deux fois l'axe des abscisses : en $D(-2; 0)$ et $E\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

Exercice 3

1) Pour tout réel x : $g(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 - 1 + 2 = \boxed{(x-1)^2 + 1}$

$h(x) = 2x^2 - 4x + 3 = 2\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) = 2\left[(x-1)^2 - 1 + \frac{3}{2}\right] = \boxed{2(x-1)^2 + 1}$

2) Pour tout réel x, $(x-1)^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif donc $(x-1)^2 + 1 \geq 1$ ce qui signifie que $g(x) \geq 1$. Or $f(x) \geq g(x)$ ce qui signifie que $\boxed{f(x) \geq 1}$

3) Pour $x = 1$, on a $g(1) \leq f(1) \leq h(1)$ or $g(1) = 1$ et $h(1) = 1$ donc $\boxed{f(1) = 1}$

4) D'après les questions précédentes, 1 est le minimum de f car f est toujours supérieur à 1 et 1 est atteint en 1. La forme canonique de f est donc $f(x) = a(x-1)^2 + 1$.

De plus $f(11) = 181$ or $a(11-1)^2 + 1 = 181 \Leftrightarrow 100a = 180 \Leftrightarrow a = 1{,}8$.

On trouve donc $\boxed{f(x) = 1{,}8(x-1)^2 + 1}$

En développant, on obtient $\boxed{f(x) = 1{,}8x^2 - 3{,}6x + 2{,}8}$

Partie D : Variations, extremum, propriété de la courbe, position relative

Exercice 1

$f : x \mapsto 3x^2 + 4$: f est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = 3 > 0$ donc f est décroissante puis croissante et a donc un minimum. Il est atteint en 0 car $-\frac{b}{2a} = 0$.

Pour tout réel x, $g(x) = -2(x^2 - 8x + 16) + 8 = -2x^2 + 16x - 24$

g est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = -2 < 0$ donc g est croissante puis décroissante et admet donc un maximum. Il est atteint en 4 car $-\frac{b}{2a} = -\frac{16}{-4} = 4$.

h est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = -2 < 0$ donc h admet un maximum. Il est atteint en 2 car $-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-4} = 2$.

Exercice 2

f est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = 1 > 0$ donc f est décroissante puis croissante et admet donc un minimum. Il est atteint en -2 car $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$. De plus $f(-2) = (-2)^2 + 4 \times (-2) - 6 = -10$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	-10	$\nearrow$	

g est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = -\frac{1}{2} < 0$ donc g est croissante puis décroissante et admet donc un maximum. Il est atteint en 5 car $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{-1} = 5$. De plus $g(5) = -\frac{25}{2} + 25 = \frac{25}{2}$.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Variations de g		$\nearrow$	$12{,}5$	$\searrow$	

Exercice 3

1) f est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = 3 > 0$ donc f est décroissante puis croissante. Elle admet donc un minimum qui est atteint en -1 car $-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{6} = -1$. De plus $f(-1) = 3 - 6 - 7 = -10$.

Mais aussi $f(-5) = 3 \times 25 - 30 - 7 = 38$ et $f(3) = 3 \times 9 + 18 - 7 = 38$.

x	-5	-1	3
Variations de f	38 ↘	-10	↗ 38

2) Le minimum de f sur $[-5; 3]$ est donc -10 et le maximum est 38.

3)

a. $f(x) = -10 \Leftrightarrow x = -1$ car -10 est le minimum de f et il n'est atteint qu'en -1. $\boxed{S = \{-1\}}$

b. $f(x) = 17 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 7 = 17 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

Pour $x^2 + 2x - 8$: $\Delta = 2^2 - 4 \times (-8) = 36$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-2+6}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$.

D'où $\boxed{S = \{-4; 2\}}$

c. $f(x) < 17 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 < 0$ or $x^2 + 2x - 8$ est du signe de 1 sauf entre les racines -4 et 2 donc $\boxed{S =]-4; 2[}$

d. Comme le minimum de f est -10 et que $-10 > -20$, on a $f(x) > -20$ pour tout $x \in [-5; 3]$ donc $\boxed{S = [-5; 3]}$

Exercice 4

1) Pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 + 5x + \frac{7}{2} > -x^2 - 3x \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + \frac{7}{2} > 0$$

Pour $2x^2 + 8x + \frac{7}{2}$: $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times \frac{7}{2} = 36$ donc $2x^2 + 8x + \frac{7}{2}$ est du signe de 2 sauf entre les racines $x_1 = \frac{-8+6}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-8-6}{4} = -\frac{7}{2}$ donc $\boxed{S = \left]-\infty; -\frac{7}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[}$

2) Sur $\left]-\infty; -\frac{7}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $f(x) > g(x)$ donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$.

Sur $\left[-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right]$, $\mathcal{C}_f$ est donc en dessous de $\mathcal{C}_g$.

Exercice 5

1) f est une fonction rationnelle. Elle est définie lorsque son dénominateur est non nul.

Pour $x^2 + x + 1$: $\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$ donc $x^2 + x + 1$ n'a pas de racines et est donc toujours non nul. f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) < 5 \Leftrightarrow \frac{4x^2-5}{x^2+x+1} < 5 \Leftrightarrow 4x^2 - 5 < 5(x^2 + x + 1)$ car $x^2 + x + 1$ est toujours du signe de $a = 1$ donc positif

$\Leftrightarrow -x^2 - 5x - 10 < 0$

Pour $-x^2 - 5x - 10$: $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = -15 < 0$ donc $-x^2 - 5x - 10$ est toujours du signe de $a = -1$ donc négatif. L'inégalité précédente est donc toujours vraie, tout comme $\boxed{f(x) < 5}$

De même : $f(x) > -6 \Leftrightarrow 4x^2 - 5 > -6(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow 10x^2 + 6x + 1 > 0$

Pour $10x^2 + 6x + 1$: $\Delta = 6^2 - 4 \times 10 = -4 < 0$ donc $10x^2 + 6x + 1$ est toujours du signe de $a = 10$ donc positif.

L'inégalité précédente est donc toujours vraie tout comme $\boxed{f(x) > -6}$

Exercice 6

1) Commençons par calculer t^2 puis t^3 :

$$t^2 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^2 - 2\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^2$$

$$t^3 = t^2 \times t = \left[\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^2 - 2\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^2\right]\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)$$

$$= (\sqrt{5}+2) - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2(\sqrt{5}-2)} + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^2} - (\sqrt{5}-2)$$

$= 4 - 3\sqrt[3]{(5+4\sqrt{5}+4)(\sqrt{5}-2)} + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(5-4\sqrt{5}+4)}$

$= 4 - 3\sqrt[3]{9\sqrt{5}-18+20-8\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{9\sqrt{5}-20+18-8\sqrt{5}}$

$= 4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

Donc, on a bien $t^3 + 3t - 4 = 4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) - 4 = 0$

2) Pour tout réel t,

$(t-1)(at^2+bt+c) = at^3 + bt^2 + ct - at^2 - bt - c = at^3 + (b-a)t^2 - (c-b)t - c$

Par identification avec $t^3 + 3t - 4$, on obtient $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 3 \\ -c = -4 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$

Donc $\boxed{(t-1)(t^2+t+4) = t^3 + 3t - 4}$

3) $t^3 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+4) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t^2 + t + 4 = 0$

Pour $t^2 + t + 4$: $\Delta = 1^2 - 4 \times 4 = -15$ donc il n'y a pas de racines.

Finalement, la seule solution de $t^3 + 3t - 4 = 0$ est 1 donc $\boxed{\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1}$