



## Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

---

### 1 Divisibilité, division euclidienne

#### Exercice 1

Sachant que l'on a  $96842 = 256 \times 375 + 842$ , déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000251]

#### Exercice 2

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$n(n+1)(n+2)(n+3)$  est divisible par 24,  
 $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$  est divisible par 120.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000257]

#### Exercice 3

Montrer que si  $n$  est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de  $n$  par 4 n'est jamais égal à 3.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000267]

#### Exercice 4

Démontrer que le nombre  $7^n + 1$  est divisible par 8 si  $n$  est impair ; dans le cas  $n$  pair, donner le reste de sa division par 8.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000254]

#### Exercice 5

Trouver le reste de la division par 13 du nombre  $100^{1000}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000250]

#### Exercice 6

1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.
2. Montrer de même que tout nombre pair vérifie  $x^2 = 0 \pmod{8}$  ou  $x^2 = 4 \pmod{8}$ .
3. Soient  $a, b, c$  trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de  $a^2 + b^2 + c^2$  et celui de  $2(ab + bc + ca)$ .
4. En déduire que ces deux nombres ne sont pas des carrés puis que  $ab + bc + ca$  non plus.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[000285]

### 2 pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide

#### Exercice 7

Calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 126, 230.
2. 390, 720, 450.
3. 180, 606, 750.

**Exercice 8**

Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

**Exercice 9**

Calculer par l'algorithme d'Euclide :  $\text{pgcd}(18480, 9828)$ . En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

**Exercice 10**

Notons  $a = 1\ 111\ 111\ 111$  et  $b = 123\ 456\ 789$ .

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .
2. Calculer  $p = \text{pgcd}(a, b)$ .
3. Déterminer deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $au + bv = p$ .

**Exercice 11**

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  :  $1665x + 1035y = 45$ .

### 3 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

**Exercice 12**

Combien  $15!$  admet-il de diviseurs ?

**Exercice 13**

Démontrer que, si  $a$  et  $b$  sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers  $a + b$  et  $ab$ .

**Exercice 14**

Soient  $a, b$  des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1.  $(2^a - 1) \mid (2^{ab} - 1)$  ;
2.  $2^p - 1$  premier  $\Rightarrow p$  premier ;
3.  $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{pgcd}(a, b)} - 1$ .

**Exercice 15**

Soit  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $a^n + 1$  soit premier, montrer que  $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k$ . Que penser de la conjecture :  $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$  est premier ?

**Exercice 16**

Soit  $p$  un nombre premier.

1. Montrer que  $\forall i \in \mathbb{N}, 0 < i < p$  on a :

$$C_p^i \text{ est divisible par } p.$$

2. Montrer par récurrence que :

$$\forall p \text{ premier}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a^p - a \text{ est divisible par } p.$$

**Exercice 17**

1. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geq 1$  on a :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

2. On pose  $F_n = 2^{2^n} + 1$ . Montrer que pour  $m \neq n$ ,  $F_n$  et  $F_m$  sont premiers entre eux.

3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000341]

---

### Exercice 18

Soit  $X$  l'ensemble des nombres premiers de la forme  $4k + 3$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $X$  est non vide.

2. Montrer que le produit de nombres de la forme  $4k + 1$  est encore de cette forme.

3. On suppose que  $X$  est fini et on l'écrit alors  $X = \{p_1, \dots, p_n\}$ .

Soit  $a = 4p_1 p_2 \dots p_n - 1$ . Montrer par l'absurde que  $a$  admet un diviseur premier de la forme  $4k + 3$ .

4. Montrer que ceci est impossible et donc que  $X$  est infini.

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[000348]

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Attention le reste d'une division euclidienne est plus petit que le quotient !

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

Utiliser les modulus (ici modulo 8), un entier est divisible par 8 si et seulement si il est équivalent à 0 modulo 8. Ici vous pouvez commencer par calculer  $7^n \pmod{8}$ .

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

Il faut travailler modulo 13, tout d'abord réduire 100 modulo 13. Se souvenir que si  $a \equiv b \pmod{13}$  alors  $a^k \equiv b^k \pmod{13}$ . Enfin calculer ce que cela donne pour les exposants  $k = 1, 2, 3, \dots$  en essayant de trouver une règle générale.

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

1. Écrire  $n = 2p + 1$ .
2. Écrire  $n = 2p$  et discuter selon que  $p$  est pair ou impair.
3. Utiliser la première question.
4. Par l'absurde supposer que cela s'écrit comme un carré, par exemple  $a^2 + b^2 + c^2 = n^2$  puis discuter selon que  $n$  est pair ou impair.

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

Commencer par simplifier l'équation ! Ensuite trouver une solution particulière  $(x_0, y_0)$  à l'aide de l'algorithme d'Euclide par exemple. Ensuite trouver une expression pour une solution générale.

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

Il ne faut surtout pas chercher à calculer  $15! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 15$ , mais profiter du fait qu'il est déjà "presque" factorisé.

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

Raisonner par l'absurde et utiliser le lemme de Gauss.

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

Pour 1. utiliser l'égalité

$$x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1} + \dots + x + 1).$$

Pour 2. raisonner par contraposition et utiliser la question 1.

La question 3. est difficile ! Supposer  $a \geq b$ . Commencer par montrer que  $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \text{pgcd}(2^a - 2^b, 2^b - 1) = \text{pgcd}(2^{a-b} - 1, 2^b - 1)$ . Cela vous permettra de comparer l'algorithme d'Euclide pour le calcul de  $\text{pgcd}(a, b)$  avec l'algorithme d'Euclide pour le calcul de  $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1)$ .

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

Raisonner par contraposition (ou par l'absurde) : supposer que  $n$  n'est pas de la forme  $2^k$ , alors  $n$  admet un facteur irréductible  $p > 2$ . Utiliser aussi  $x^p + 1 = (x + 1)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{p-1})$  avec  $x$  bien choisi.

**Indication pour l'exercice 16 ▲**

1. Écrire

$$C_p^i = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(i+1))}{i!}$$

et utiliser le lemme de Gauss ou le lemme d'Euclide.

2. Raisonner avec les modulus, c'est-à-dire prouver  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .

**Indication pour l'exercice 17 ▲**

1. Il faut être très soigneux :  $n$  est fixé une fois pour toute, la récurrence se fait sur  $k \in \mathbb{N}$ .
2. Utiliser la question précédente avec  $m = n + k$ .

3. Par l'absurde, supposer qu'il y a seulement  $N$  nombres premiers, considérer  $N + 1$  nombres du type  $F_i$ . Appliquer le "principe du tiroir" : *si vous avez  $N + 1$  chaussettes rangées dans  $N$  tiroirs alors il existe (au moins) un tiroir contenant (plus de) deux chaussettes.*
-

### Correction de l'exercice 1 ▲

La seule chose à voir est que pour une division euclidienne le reste doit être plus petit que le quotient. Donc les divisions euclidiennes s'écrivent :  $96842 = 256 \times 378 + 74$  et  $96842 = 258 \times 375 + 92$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

Il suffit de constater que pour 4 nombres consécutifs il y a nécessairement : un diviseur de 2, un diviseur de 3, un diviseur de 4 (tous distincts). Donc le produit de 4 nombres consécutifs est divisible par  $2 \times 3 \times 4 = 24$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

Ecrire  $n = p^2 + q^2$  et étudier le reste de la division euclidienne de  $n$  par 4 en distinguant les différents cas de parité de  $p$  et  $q$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

Raisonnons modulo 8 :

$$7 \equiv -1 \pmod{8}.$$

Donc

$$7^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod{8}.$$

Le reste de la division euclidienne de  $7^n + 1$  par 8 est donc  $(-1)^n + 1$  donc Si  $n$  est impair alors  $7^n + 1$  est divisible par 8. Et si  $n$  est pair  $7^n + 1$  n'est pas divisible par 8.

### Correction de l'exercice 5 ▲

Il s'agit de calculer  $100^{1000}$  modulo 13. Tout d'abord  $100 \equiv 9 \pmod{13}$  donc  $100^{1000} \equiv 9^{1000} \pmod{13}$ . Or  $9^2 \equiv 81 \equiv 3 \pmod{13}$ ,  $9^3 \equiv 9^2 \cdot 9 \equiv 3 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{13}$ , Or  $9^4 \equiv 9^3 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{13}$ ,  $9^5 \equiv 9^4 \cdot 9 \equiv 9 \cdot 9 \equiv 3 \pmod{13}$ . Donc  $100^{1000} \equiv 9^{1000} \equiv 9^{3 \cdot 333 + 1} \equiv (9^3)^{333} \cdot 9 \equiv 1^{333} \cdot 9 \equiv 9 \pmod{13}$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soit  $n$  un nombre impair, alors il s'écrit  $n = 2p + 1$  avec  $p \in \mathbb{N}$ . Maintenant  $n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4p(p + 1) + 1$ . Donc  $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ .
2. Si  $n$  est pair alors il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2p$ . Et  $n^2 = 4p^2$ . Si  $p$  est pair alors  $p^2$  est pair et donc  $n^2 = 4p^2$  est divisible par 8, donc  $n^2 \equiv 0 \pmod{8}$ . Si  $p$  est impair alors  $p^2$  est impair et donc  $n^2 = 4p^2$  est divisible par 4 mais pas par 8, donc  $n^2 \equiv 4 \pmod{8}$ .
3. Comme  $a$  est impair alors d'après la première question  $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$ , et de même  $c^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ,  $c^2 \equiv 1 \pmod{8}$ . Donc  $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{8}$ . Pour l'autre reste, écrivons  $a = 2p + 1$  et  $b = 2q + 1$ ,  $c = 2r + 1$ , alors  $2ab = 2(2p + 1)(2q + 1) = 8pq + 4(p + q) + 2$ . Alors  $2(ab + bc + ca) = 8pq + 8qr + 8pr + 8(p + q + r) + 6$ , donc  $2(ab + bc + ca) \equiv 6 \pmod{8}$ .
4. Montrons par l'absurde que le nombre  $a^2 + b^2 + c^2$  n'est pas le carré d'un nombre entier. Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a^2 + b^2 + c^2 = n^2$ . Nous savons que  $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3 \pmod{8}$ . Si  $n$  est impair alors  $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$  et si  $n$  est pair alors  $n^2 \equiv 0 \pmod{8}$  ou  $n^2 \equiv 4 \pmod{8}$ . Dans tous les cas  $n^2$  n'est pas congru à 3 modulo 8. Donc il y a une contradiction. La conclusion est que l'hypothèse de départ est fautive donc  $a^2 + b^2 + c^2$  n'est pas un carré. Le même type de raisonnement est valide pour  $2(ab + bc + ca)$ .

Pour  $ab + bc + ca$  l'argument est similaire : d'une part  $2(ab + bc + ca) \equiv 6 \pmod{8}$  et d'autre part si, par l'absurde, on suppose  $ab + bc + ca = n^2$  alors selon la parité de  $n$  nous avons  $2(ab + bc + ca) \equiv 2n^2 \equiv 2 \pmod{8}$  ou à  $0 \pmod{8}$ . Dans les deux cas cela aboutit à une contradiction. Nous avons montré que  $ab + bc + ca$  n'est pas un carré.

### Correction de l'exercice 7 ▲

Il s'agit ici d'utiliser la décomposition des nombres en facteurs premiers.

1.  $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$  et  $230 = 2 \cdot 5 \cdot 23$  donc le pgcd de 126 et 230 est 2.
2.  $390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$ ,  $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ ,  $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$  et donc le pgcd de ces trois nombres est  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ .
3.  $\text{pgcd}(180, 606, 750) = 6$ .

### Correction de l'exercice 8 ▲

Soient  $a, b$  deux entiers de pgcd 18 et de somme 360. Soit  $a', b'$  tel que  $a = 18a'$  et  $b = 18b'$ . Alors  $a'$  et  $b'$  sont premiers entre eux, et leur somme est  $360/18 = 20$ .

Nous pouvons facilement énumérer tous les couples d'entiers naturels  $(a', b')$  ( $a' \leq b'$ ) qui vérifient cette condition, ce sont les couples :

$$(1, 20), (3, 17), (7, 13), (9, 11).$$

Pour obtenir les couples  $(a, b)$  recherchés ( $a \leq b$ ), il suffit de multiplier les couples précédents par 18 :

$$(18, 342), (54, 306), (126, 234), (162, 198).$$

---

### Correction de l'exercice 9 ▲

1.  $\text{pgcd}(18480, 9828) = 84$  ;
2.  $25 \times 18480 + (-47) \times 9828 = 84$ .

---

### Correction de l'exercice 10 ▲

1.  $a = 9b + 10$ .
2. Calculons le pgcd par l'algorithme d'Euclide.  $a = 9b + 10$ ,  $b = 12345678 \times 10 + 9$ ,  $10 = 1 \times 9 + 1$ . Donc le pgcd vaut 1 ;
3. Nous reprenons les équations précédentes en partant de la fin :  $1 = 10 - 9$ , puis nous remplaçons 9 grâce à la deuxième équation de l'algorithme d'Euclide :  $1 = 10 - (b - 12345678 \times 10) = -b + 1234679 \times 10$ . Maintenant nous remplaçons 10 grâce à la première équation :  $1 = -b + 12345679(a - 9b) = 12345679a - 11111112b$ .

---

### Correction de l'exercice 11 ▲

En divisant par 45 (qui est le pgcd de 1665, 1035, 45) nous obtenons l'équation équivalente :

$$37x + 23y = 1 \quad (E)$$

Comme le pgcd de 37 et 23 est 1, alors d'après le théorème de Bézout cette équation  $(E)$  a des solutions.

L'algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd de 37 et 23 fournit les coefficients de Bézout :  $37 \times 5 + 23 \times (-8) = 1$ . Une solution particulière de  $(E)$  est donc  $(x_0, y_0) = (5, -8)$ .

Nous allons maintenant trouver l'expression générale pour les solutions de l'équation  $(E)$ . Soient  $(x, y)$  une solution de l'équation  $37x + 23y = 1$ . Comme  $(x_0, y_0)$  est aussi solution, nous avons  $37x_0 + 23y_0 = 1$ . Faisons la différence de ces deux égalités pour obtenir  $37(x - x_0) + 23(y - y_0) = 0$ . Autrement dit

$$37(x - x_0) = -23(y - y_0) \quad (*)$$

On en déduit que  $37 | 23(y - y_0)$ , or  $\text{pgcd}(23, 37) = 1$  donc par le lemme de Gauss,  $37 | (y - y_0)$ . (C'est ici qu'il est important d'avoir divisé par 45 dès le début !) Cela nous permet d'écrire  $y - y_0 = 37k$  pour un  $k \in \mathbb{Z}$ .

Reprenant de l'égalité  $(*)$  : nous obtenons  $37(x - x_0) = -23 \times 37k$ . Ce qui donne  $x - x_0 = -23k$ . Donc si  $(x, y)$  est solution de  $(E)$  alors elle est de la forme :  $(x, y) = (x_0 - 23k, y_0 + 37k)$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Réciproquement pour chaque  $k \in \mathbb{Z}$ , si  $(x, y)$  est de cette forme alors c'est une solution de  $(E)$  (vérifiez-le !).

Conclusion : les solutions sont

$$\{(5 - 23k, -8 + 37k) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

---

### Correction de l'exercice 12 ▲

Écrivons la décomposition de  $15! = 1.2.3.4 \dots 15$  en facteurs premiers.  $15! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ . Un diviseur de  $15!$  s'écrit  $d = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta \cdot 11^\epsilon \cdot 13^\eta$  avec  $0 \leq \alpha \leq 11$ ,  $0 \leq \beta \leq 6$ ,  $0 \leq \gamma \leq 3$ ,  $0 \leq \delta \leq 2$ ,  $0 \leq \epsilon \leq 1$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ . De plus tout nombre  $d$  de cette forme est un diviseur de  $15!$ . Le nombre de diviseurs est donc  $(11 + 1)(6 + 1)(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 4032$ .

---

### Correction de l'exercice 13 ▲

Soit  $a$  et  $b$  des entiers premiers entre eux. Raisonnons par l'absurde et supposons que  $ab$  et  $a + b$  ne sont pas premiers entre eux. Il existe alors un nombre premier divisant  $ab$  et  $a + b$ . Par le lemme d'Euclide comme  $p | ab$  alors  $p | a$  ou  $p | b$ . Par exemple supposons que  $p | a$ . Comme  $p | a + b$  alors  $p$  divise aussi  $(a + b) - a$ , donc  $p | b$ .  $\delta$  ne divise pas  $b$  cela implique que  $\delta$  et  $b$  sont premiers entre eux.

D'après le lemme de Gauss, comme  $\delta$  divise  $ab$  et  $\delta$  premier avec  $b$  alors  $\delta$  divise  $a$ . Donc  $p$  est un facteur premier de  $a$  et de  $b$  ce qui est absurde.

---

### Correction de l'exercice 14 ▲

1. Nous savons que

$$x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1} + \dots + x + 1),$$

pour  $x = 2^a$  nous obtenons :

$$2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + \dots + 2^a + 1).$$

Donc  $(2^a - 1) | (2^{ab} - 1)$ .

2. Montrons la contraposée. Supposons que  $p$  ne soit pas premier. Donc  $p = ab$  avec  $1 < p, q < a$ . Par la question précédente  $2^a - 1$  divise  $2^p - 1$  (et  $1 < 2^a - 1 < 2^p - 1$ ). Donc  $2^p - 1$  n'est pas un nombre premier.
3. Nous supposons  $a \geq b$ . Nous allons montrer que faire l'algorithme d'Euclide pour le couple  $(2^a - 1, 2^b - 1)$  revient à faire l'algorithme d'Euclide pour  $(a, b)$ . Tout d'abord rappelons la formule qui est à la base de l'algorithme d'Euclide :  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a - b, b)$ . Appliqué à  $2^a - 1$  et  $2^b - 1$  cela donne directement  $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \text{pgcd}(2^a - 2^b, 2^b - 1)$ . Mais  $2^a - 2^b = 2^b(2^{a-b} - 1)$  d'où  $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \text{pgcd}(2^b(2^{a-b} - 1), 2^b - 1) = \text{pgcd}(2^{a-b} - 1, 2^b - 1)$ . La dernière égalité vient du fait  $2^b$  et  $2^b - 1$  sont premiers entre eux (deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux).  
 Nous avons montré :  $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \text{pgcd}(2^{a-b} - 1, 2^b - 1)$ . Cette formule est à mettre en parallèle de  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a - b, b)$ . En itérant cette formule nous obtenons que si  $a = bq + r$  alors :  $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \text{pgcd}(2^{a-bq} - 1, 2^b - 1) = \text{pgcd}(2^r - 1, 2^b - 1)$  à comparer avec  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a - bq, b) = \text{pgcd}(r, b)$ . Nous avons notre première étape de l'algorithme d'Euclide. En itérant l'algorithme d'Euclide pour  $(a, b)$ , nous nous arrêtons au dernier reste non nul :  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r) = \dots = \text{pgcd}(r_n, 0) = r_n$ . Ce qui va donner pour nous  $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \text{pgcd}(2^b - 1, 2^r - 1) = \dots = \text{pgcd}(2^{r_n} - 1, 2^0 - 1) = 2^{r_n} - 1$ .  
 Bilan :  $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{pgcd}(a, b)} - 1$ .

### Correction de l'exercice 15 ▲

1. Supposons que  $a^n + 1$  est premier. Nous allons montrer la contraposée. Supposons que  $n$  n'est pas de la forme  $2^k$ , c'est-à-dire que  $n = p \times q$  avec  $p$  un nombre premier  $> 2$  et  $q \in \mathbb{N}$ . Nous utilisons la formule

$$x^p + 1 = (x + 1)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{p-1})$$

avec  $x = a^q$  :

$$a^n + 1 = a^{pq} + 1 = (a^q)^p + 1 = (a^q + 1)(1 - a^q + (a^q)^2 + \dots + (a^q)^{p-1}).$$

Donc  $a^q + 1$  divise  $a^n + 1$  et comme  $1 < a^q + 1 < a^n + 1$  alors  $a^n + 1$  n'est pas premier. Par contraposition si  $a^n + 1$  est premier alors  $n = 2^k$ .

2. Cette conjecture est fautive, mais pas facile à vérifier sans une bonne calculette ! En effet pour  $n = 5$  nous obtenons :

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417.$$

### Correction de l'exercice 16 ▲

1. Étant donné  $0 < i < p$ , nous avons

$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(i+1))}{i!}$$

Comme  $C_p^i$  est un entier alors  $i!$  divise  $p(p-1)\dots(p-(i+1))$ . Mais  $i!$  et  $p$  sont premiers entre eux (en utilisant l'hypothèse  $0 < i < p$ ). Donc d'après le théorème de Gauss :  $i!$  divise  $(p-1)\dots(p-(i+1))$ , autrement dit il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $ki! = (p-1)\dots(p-(i+1))$ . Maintenant nous avons  $C_p^i = pk$  donc  $p$  divise  $C_p^i$ .

2. Il s'agit de montrer le petit théorème de Fermat : pour  $p$  premier et  $a \in \mathbb{N}^*$ , alors  $a^p \equiv a \pmod{p}$ . Fixons  $p$ . Soit l'assertion

$$(\mathcal{H}_a) \quad a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Pour  $a = 1$  cette assertion est vraie ! Étant donné  $a \geq 1$  supposons que  $\mathcal{H}_a$  soit vraie. Alors

$$(a+1)^p = \sum_{i=0}^p C_p^i a^i.$$

Mais d'après la question précédente pour  $0 < i < p$ ,  $p$  divise  $C_p^i$ . En termes de modulo nous obtenons :

$$(a+1)^p \equiv C_p^0 a^0 + C_p^p a^p \equiv 1 + a^p \pmod{p}.$$

Par l'hypothèse de récurrence nous savons que  $a^p \equiv a \pmod{p}$ , donc

$$(a+1)^p \equiv a+1 \pmod{p}.$$

Nous venons de prouver que  $\mathcal{H}_{a+1}$  est vraie. Par le principe de récurrence alors quelque soit  $a \in \mathbb{N}^*$  nous avons :

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

### Correction de l'exercice 17 ▲



1. Fixons  $n$  et montrons la récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ . La formule est vraie pour  $k = 0$ . Supposons la formule vraie au rang  $k$ . Alors

$$\begin{aligned} (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=0}^k (2^{2^{n+i}} + 1) &= (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1) \times (2^{2^{n+k}} + 1) \\ &= (2^{2^{n+k}} - 1) \times (2^{2^{n+k}} + 1) = (2^{2^{n+k}})^2 - 1 = 2^{2^{n+k+1}} - 1. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé l'hypothèse de récurrence dans ces égalités. Nous avons ainsi montré la formule au rang  $k + 1$ . Et donc par le principe de récurrence elle est vraie.

2. Écrivons  $m = n + k$ , alors l'égalité précédente devient :

$$F_m + 2 = (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=n}^{m-1} F_i.$$

Soit encore :

$$F_n \times (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=n+1}^{m-1} F_i - F_m = 2.$$

Si  $d$  est un diviseur de  $F_n$  et  $F_m$  alors  $d$  divise 2 (ou alors on peut utiliser le théorème de Bézout). En conséquence  $d = 1$  ou  $d = 2$ . Mais  $F_n$  est impair donc  $d = 1$ . Nous avons montré que tous diviseurs de  $F_n$  et  $F_m$  est 1, cela signifie que  $F_n$  et  $F_m$  sont premiers entre eux.

3. Supposons qu'il y a un nombre fini de nombres premiers. Nous les notons alors  $\{p_1, \dots, p_N\}$ . Prenons alors  $N + 1$  nombres de la famille  $F_i$ , par exemple  $\{F_1, \dots, F_{N+1}\}$ . Chaque  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, N + 1$  est divisible par (au moins) un facteur premier  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Nous avons  $N + 1$  nombres  $F_i$  et seulement  $N$  facteurs premiers  $p_j$ . Donc par le principe des tiroirs il existe deux nombres distincts  $F_k$  et  $F_{k'}$  (avec  $1 \leq k, k' \leq N + 1$ ) qui ont un facteur premier en commun. En conséquence  $F_k$  et  $F_{k'}$  ne sont pas premiers entre eux. Ce qui contredit la question précédente. Il existe donc une infinité de nombres premiers.

### Correction de l'exercice 18 ▲

- $X$  est non vide car, par exemple pour  $k = 2$ ,  $4k + 3 = 11$  est premier.
- $(4k + 1)(4\ell + 1) = 16k\ell + 4(k + \ell) + 1 = 4(4k\ell + k + \ell) + 1$ . Si l'on note l'entier  $k' = 4k\ell + k + \ell$  alors  $(4k + 1)(4\ell + 1) = 4k' + 1$ , ce qui est bien de la forme voulue.
- Remarquons que 2 est le seul nombre premier pair, les autres sont de la forme  $4k + 1$  ou  $4k + 3$ . Ici  $a$  n'est pas divisible par 2, supposons –par l'absurde– que  $a$  n'a pas de diviseur de la forme  $4k + 3$ , alors tous les diviseurs de  $a$  sont de la forme  $4k + 1$ . C'est-à-dire que  $a$  s'écrit comme produit de nombre de la forme  $4k + 1$ , et par la question précédente  $a$  peut s'écrire  $a = 4k' + 1$ . Donc  $a \equiv 1 \pmod{4}$ . Mais comme  $a = 4p_1 p_2 \dots p_n - 1$ ,  $a \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$ . Nous obtenons une contradiction. Donc  $a$  admet un diviseur premier  $p$  de la forme  $p = 4\ell + 3$ .
- Dans l'ensemble  $X = \{p_1, \dots, p_n\}$  il y a tous les nombres premiers de la forme  $4k + 3$ . Le nombre  $p$  est premier et s'écrit  $p = 4\ell + 3$  donc  $p$  est un élément de  $X$ , donc il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $p = p_i$ . Raisonnons modulo  $p = p_i$  :  $a \equiv 0 \pmod{p}$  car  $p$  divise  $a$ . D'autre part  $a = 4p_1 \dots p_n - 1$  donc  $a \equiv -1 \pmod{p}$ . (car  $p_i$  divise  $p_1 \dots p_n$ ). Nous obtenons une contradiction, donc  $X$  est infini : il existe une infinité de nombre premier de la forme  $4k + 3$ . Petite remarque, tous les nombres de la forme  $4k + 3$  ne sont pas des nombres premiers, par exemple pour  $k = 3$ ,  $4k + 3 = 15$  n'est pas premier.